

Système de masse variable et référentiels accélérés

Dans la première partie de ce chapitre, on va examiner les systèmes de masse variable. Dans la deuxième section, on abordera l'étude de la dynamique d'un point matériel dans un référentiel accéléré. Finalement, dans la troisième partie, on discutera quelques exemples de mouvements décrits par rapport à un référentiel accéléré.

10.1 Système de masse variable

Un **système de masse variable** est un système dont la masse $m(t)$ varie au cours du temps. Un système de masse variable est un **système ouvert** ce qui signifie qu'il échange de la matière, ou de la masse, avec l'extérieur. Ainsi, son débit de masse est non-nul,

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \neq 0 \quad \text{et} \quad dm = \dot{m} dt \quad (10.1)$$

Il existe une multitude de systèmes de masse variable. On peut mentionner le cas d'une baignoire qui se remplit ou se vide, d'une chaînette qui tombe progressivement dans un réceptacle ou d'une fusée qui décolle. Au chapitre 2, on a énoncé la 2^e loi de Newton (2.17) puis on en a déduit une expression de la loi du mouvement (2.32) pour un point matériel de masse constante. Comme la masse varie, on va devoir en tenir compte explicitement dans l'expression de la dynamique, c'est-à-dire qu'on va baser notre analyse sur la forme générale (2.17) de la 2^e loi de Newton.



Baignoire

10.1.1 Poussée d'une fusée

On considère un système physique de masse variable constitué d'une fusée et de son carburant. Les gaz sont éjectés avec une vitesse d'éjection relative vectorielle $\mathbf{u}$ mesurée par rapport au référentiel de la fusée, c'est-à-dire qu'elle est opposée à la vitesse $\mathbf{v}$ de la fusée, c'est-à-dire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$. On considère l'évolution du système durant un intervalle de temps infinitésimal dt . Compte tenu de l'identité (1.19), la masse $m(t + dt)$ de la fusée s'écrit,

$$m(t + dt) = m(t) + dm \quad (10.2)$$

et $dm < 0$ est la variation de masse de la fusée due à l'éjection des gaz. La quantité de mouvement $\mathbf{p}(t + dt)$ du système formé de la fusée et des gaz s'écrit au 1^{er} ordre,

$$\mathbf{p}(t + dt) = \underbrace{(m(t) + dm)(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v})}_{\text{fusée}} + \underbrace{(-dm)(\mathbf{v} + \mathbf{u})}_{\text{gaz}} \quad (10.3)$$

qui s'écrit sous forme développée comme,

$$\mathbf{p}(t + dt) = \underbrace{m(t)\mathbf{v}(t)}_{=\mathbf{p}(t)} + m(t)d\mathbf{v} + \cancel{dm d\mathbf{v}} - dm\mathbf{u} \quad (10.4)$$

où on a négligé le terme $dm d\mathbf{v}$ qui est un terme du 2^e ordre. Compte tenu de la définition de la quantité de mouvement (2.29) et de l'expression (10.4), la variation infinitésimale de quantité de mouvement $d\mathbf{p}$ est donnée par,

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t) = m(t)d\mathbf{v} - dm\mathbf{u} \quad (10.5)$$

En substituant l'expression (10.5) dans la 2^e loi de Newton, on obtient,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \quad (10.6)$$

Compte tenu de la définition du vecteur accélération (2.3), on peut mettre la loi du mouvement (10.6) sous la forme suivante (Fig. 10.1),

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \dot{m} \mathbf{u} = m \mathbf{a} \quad (10.7)$$

où le vecteur vitesse relative d'éjection des gaz $\mathbf{u}$ est constant.

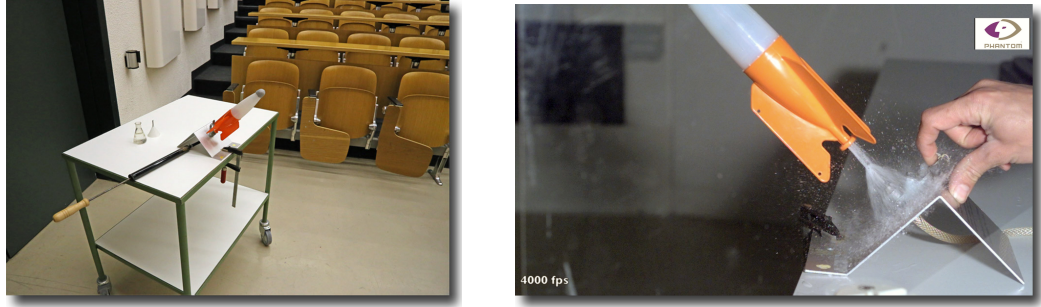


FIGURE 10.1 Fusée propulsée par la poussée de l'air comprimé et par un mélange d'air et d'eau.

Dans le cas particulier où les frottements de l'air sont négligeables, la seule force extérieure agissant sur la fusée est son poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. Ainsi, la loi du mouvement (10.7) se réduit à,

$$m\mathbf{g} + \dot{m} \mathbf{u} = m \mathbf{a} \quad (10.8)$$

Le deuxième terme du membre de gauche $\dot{m} \mathbf{u}$ est une force appelée la **poussée** parce qu'elle s'oppose au poids $m\mathbf{g}$ et *pousse* la fusée dans son mouvement. En effet, le vecteur vitesse $\mathbf{u}$ est opposé au mouvement et $\dot{m} < 0$, donc la poussée est orientée dans le sens du mouvement.

La poussée permet de propulser un enseignant de physique sur un tricycle lorsqu'il vide une bonbonne de CO_2 . La poussée augmente le poids apparent d'une chaînette qui tombe dans un réceptacle (Fig. 10.2).

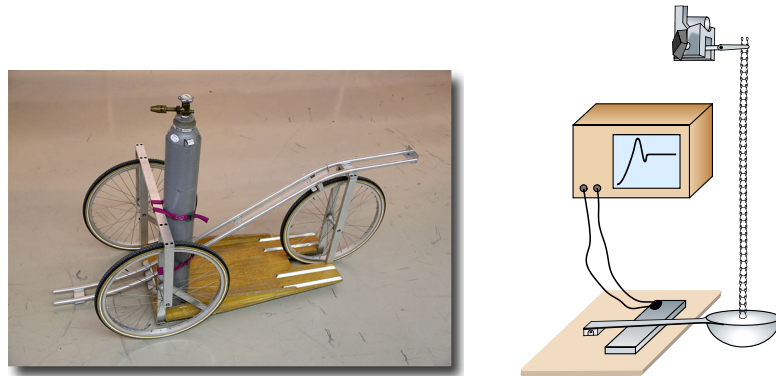


FIGURE 10.2 Tricycle propulsé par du CO_2 qui s'échappe d'une bonbonne. Mesure du poids apparent d'une chaînette qui tombe dans un réceptacle.

10.1.2 Condition de décollage et vitesse

On va considérer le cas particulier où la vitesse d'éjection des gaz $\mathbf{u}$ par rapport au référentiel de la fusée est constante et orientée vers le sol. On considère un décollage vertical de la fusée selon l'axe Oz centré sur la rampe de lancement. Les projections des grandeurs

vectérielles selon l'axe vertical orienté positivement vers le haut s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -g \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{u} &= -u \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{a} &= \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (10.9)$$

La projection de la loi du mouvement (10.8) selon l'axe de coordonnée verticale de vecteur unitaire $\hat{\mathbf{z}}$ orienté vers le haut s'écrit,

$$\text{selon } \hat{\mathbf{z}} : -mg - \dot{m}u = m\ddot{z} \quad (10.10)$$

Pour que la fusée décolle à l'instant initial $t = 0$, il faut que l'accélération verticale soit positive,

$$\ddot{z}(0) > 0 \quad (10.11)$$

Compte tenu de l'équation du mouvement (10.10), la condition de décollage (10.11) implique que la norme de la poussée doit être supérieure à la norme du poids,

$$|\dot{m}(0)u| = -\dot{m}(0)u > m(0)g \quad (10.12)$$

Pour obtenir l'équation de la vitesse en fonction du temps, on met l'équation du mouvement (10.10) sous la forme,

$$m(t) \frac{dz}{dt} = -m(t)g - \frac{dm(t)}{dt}u \quad (10.13)$$

et on tire la variation infinitésimale de la coordonnée verticale de vitesse,

$$dz(t) = -g dt - u \frac{dm(t)}{m(t)} \quad (10.14)$$

L'intégrale de l'équation (10.14) par rapport au temps s'écrit explicitement,

$$\int_0^{v_z(t)} dz(t') = -g \int_0^t dt' - u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm'(t')}{m'(t')} \quad (10.15)$$

La solution de l'intégrale (10.15) est,

$$v_z(t) = -gt - u \ln \left(\frac{m(t)}{m(0)} \right) \quad (10.16)$$

Comme la masse de la fusée diminue au cours du temps en raison des gaz éjectés, le logarithme du rapport des masses est négatif,

$$m(t) \leq m(0) \quad \text{ainsi} \quad \ln \left(\frac{m(t)}{m(0)} \right) \leq 0 \quad (10.17)$$

Ainsi, compte tenu de l'équation de la vitesse (10.16), la condition d'ascension verticale s'écrit,

$$v_z(t) \geq 0 \quad \text{ainsi} \quad 0 \leq t \leq -\frac{u}{g} \ln \left(\frac{m(t)}{m(0)} \right) \quad (10.18)$$

Au temps d'ascension t_m , lorsque la fusée atteint sa hauteur maximale, la coordonnée de vitesse verticale est nulle, c'est-à-dire $v_z(t_m) = 0$. Ainsi, au temps t_m , l'inégalité large (10.18) est saturée,

$$t_m = -\frac{u}{g} \ln \left(\frac{m(t_m)}{m(0)} \right) \quad (10.19)$$

Pour obtenir explicitement le temps d'ascension t_m , il faut modèle physique pour l'éjection des gaz d'échappement qui détermine la variation temporelle de la masse $m(t_m)$.



Décollage de la navette spatiale

10.2 Référentiels accélérés

Au chapitre 2, on a défini un référentiel d'inertie à l'aide de la 1^{ère} loi de Newton. On a ensuite montré que la 2^e loi de Newton est la même pour tous les référentiels d'inertie. À présent, on aimerait étendre notre analyse à des **référentiels accélérés** définis par le fait que les points matériels de ce référentiel accélèrent par rapport aux points matériels d'un référentiel d'inertie. En particulier, on aimerait savoir quelle est l'expression de la 2^e loi de Newton dans un référentiel accéléré. C'est un problème très important en pratique. Comment décrire le mouvement d'un point matériel dans une voiture qui effectue un virage ? Quel est le mouvement d'un pendule dans un train qui accélère ? Pour répondre à ces questions, on va à présent décrire la dynamique dans un référentiel accéléré. Par exemple, dans le référentiel d'un jet d'eau en rotation, la trajectoire de l'eau — filmée par une caméra en rotation — est une courbe (Fig. 10.3). Ceci est dû à l'action de forces qu'on appelle des forces d'inertie.

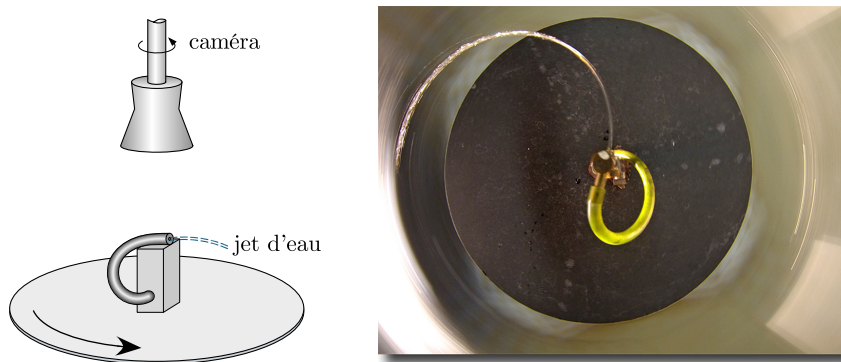


FIGURE 10.3 Le mouvement radial de gouttes d'eau qui sortent d'une buse horizontale est filmé par une caméra en rotation avec la buse. Dans le référentiel accéléré (tournant) de la buse, la trajectoire du jet d'eau est une courbe fixe.

Au chapitre 2, on a défini un référentiel d'inertie comme un référentiel par rapport auquel le principe d'inertie est vérifié. Cela signifie que par rapport à un tel référentiel, en absence de force extérieure résultante, le mouvement d'un point matériel est un mouvement rectiligne uniforme. Les référentiels d'inertie se déplacent à vitesse constante les uns par rapport aux autres. Donc l'accélération d'un point matériel est la même dans tous ces référentiels. Par conséquent, la 2^e loi de Newton est la même dans tous les référentiels d'inertie et la cause du mouvement est la résultante des forces extérieures.

Par contraste avec un référentiel d'inertie, un référentiel accéléré est un référentiel par rapport auquel le principe d'inertie n'est pas vérifié. Cela signifie que par rapport à un tel référentiel, en absence de force extérieure résultante, le mouvement d'un point matériel n'est pas un mouvement rectiligne uniforme en raison de la présence de forces d'inertie. Ces forces sont les causes de l'accélération non-nulle d'un référentiel accéléré par rapport à un référentiel d'inertie quelconque. La 2^e loi de Newton reste mathématiquement la même dans un référentiel accéléré que dans un référentiel d'inertie, mais son interprétation change. Certains termes de l'accélération de l'objet ne sont plus perceptibles dans un référentiel accéléré ce qui va se traduire par la présence de forces supplémentaires qu'on appelle des forces d'inertie qui les compensent.

10.2.1 Position relative

Pour décrire les mouvements par rapport à un référentiel accéléré, on appelle **référentiel absolu** le référentiel d'inertie par rapport auquel on décrit le **mouvement absolu** d'un point matériel. On appelle **référentiel relatif** le référentiel accéléré par rapport auquel on décrit le **mouvement relatif** du point matériel. On décrit la dynamique du point matériel P par rapport au référentiel absolu en utilisant le repère absolu $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ d'origine O et on décrit sa dynamique par rapport au référentiel relatif en utilisant le repère relatif $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ d'origine A .

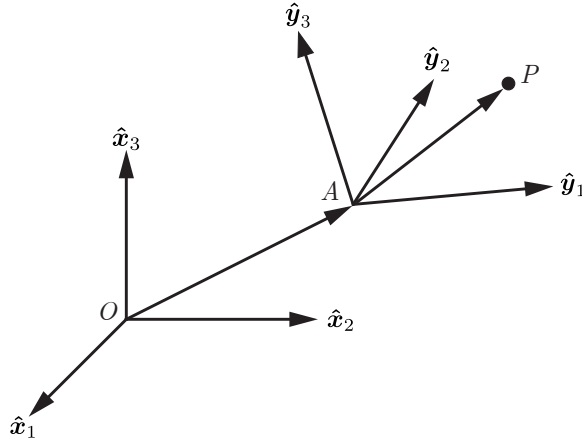


FIGURE 10.4 Le repère absolu $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ d'origine O est immobile par rapport au référentiel absolu et le repère relatif $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ d'origine A est immobile par rapport au référentiel relatif.

Géométriquement, l'origine O du repère absolu, l'origine A du repère relatif et le matériel P sont liés par la relation vectorielle,

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP} \quad (10.20)$$

La position absolue $\mathbf{r}_a(P)$ et la position relative $\mathbf{r}_r(P)$ du point matériel P ainsi que la position absolue $\mathbf{r}_a(A)$ du point A sont définies comme (Fig. 10.4),

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a(P) &= \mathbf{OP} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{x}_i \\ \mathbf{r}_r(P) &= \mathbf{AP} = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{y}_i \\ \mathbf{r}_a(A) &= \mathbf{OA} \end{aligned} \quad (10.21)$$

Ainsi, la position absolue du point matériel P est liée à sa position relative par,

$$\mathbf{r}_a(P) = \mathbf{r}_a(A) + \mathbf{r}_r(P) \quad (10.22)$$

10.2.2 Vitesse relative

En toute généralité, le repère absolu $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ est immobile et le repère relatif $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ est en mouvement de translation et de rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport au référentiel absolu. Compte tenu des formules de Poisson (5.34), les dérivées temporelles des vecteurs de base s'écrivent,

$$\dot{\hat{x}}_i = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \dot{\hat{y}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{y}_i \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (10.23)$$

La dérivée temporelle de l'équation (10.22) s'écrit,

$$\dot{\mathbf{r}}_a(P) = \dot{\mathbf{r}}_a(A) + \dot{\mathbf{r}}_r(P) \quad (10.24)$$

Compte tenu des relations (10.21) et (10.23) les dérivées temporelles des positions absolue et relative du point matériel P s'écrivent,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_a(P) &= \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{x}_i + \sum_{i=1}^3 x_i \dot{\hat{x}}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{x}_i \\ \dot{\mathbf{r}}_r(P) &= \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^3 y_i \dot{\hat{y}}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^3 y_i (\boldsymbol{\Omega} \times \hat{y}_i) \end{aligned} \quad (10.25)$$

A l'aide de la position relative (10.21), on obtient l'identité vectorielle,

$$\sum_{i=1}^3 y_i (\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{y}}_i) = \boldsymbol{\Omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 y_i \hat{\mathbf{y}}_i \right) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.26)$$

La vitesse absolue $\mathbf{v}_a(P)$ et la vitesse relative $\mathbf{v}_r(P)$ du point matériel P et la vitesse absolue du point A sont définies comme,

$$\mathbf{v}_a(P) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_r(P) = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_a(A) = \dot{\mathbf{r}}_a(A) \quad (10.27)$$

Les vitesses absolue $\mathbf{v}_a(P)$ et relative $\mathbf{v}_r(P)$ sont les vitesses du point matériel P dans les référentiels absolu et relatif où les repères absolu $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ et relatif $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ sont immobiles. Compte tenu de l'équation (10.26) et des définitions (10.27), les dérivées temporelles des positions (10.25) deviennent,

$$\dot{\mathbf{r}}_a(P) = \mathbf{v}_a(P) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{r}}_r(P) = \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.28)$$

En substituant la dernière équation (10.27) et les équations (10.28) dans l'équation (10.24), on obtient l'identité suivante entre les vitesses,

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.29)$$

La vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_e(P)$ du point matériel P est définie comme la vitesse absolue qu'aurait le point matériel s'il était fixe dans le référentiel accéléré, c'est-à-dire si $\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{v}_e(P) = \mathbf{v}_a(A) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.30)$$

Par conséquent, la vitesse absolue (10.29) du point matériel P peut s'écrire,

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_e(P) + \mathbf{v}_r(P) \quad (10.31)$$

Théorème 10.1 *La vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ est indépendante du choix de l'origine A , qui est un point fixe du repère relatif, lequel est immobile par rapport au référentiel relatif.*

Démonstration A l'aide de la définition (10.21), l'identité entre les vitesses (10.29) est mise sous la forme,

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP} \quad (10.32)$$

On considère un autre point matériel B fixe par rapport au référentiel relatif, ce qui signifie que sa vitesse relative est nulle, c'est-à-dire $\mathbf{v}_r(B) = \mathbf{0}$. Par conséquent, pour le point matériel B , l'identité entre les vitesses (10.32) se réduit à,

$$\mathbf{v}_a(B) = \mathbf{v}_a(A) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AB} \quad (10.33)$$

ou de manière équivalente,

$$\mathbf{v}_a(A) = \mathbf{v}_a(B) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{BA} \quad (10.34)$$

En substituant l'équation (10.34) dans l'équation (10.32), on obtient,

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(B) + \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{BA} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP} \quad (10.35)$$

qui compte tenu de l'identité vectorielle $\mathbf{BP} = \mathbf{BA} + \mathbf{AP}$ se réduit à,

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(B) + \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{BP} \quad (10.36)$$

En remplaçant le point matériel A par le point matériel B dans l'identité entre les vitesses (10.32), on obtient l'identité des vitesses (10.36) sans changer le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$. $\square$

10.2.3 Accélération relative

La dérivée temporelle de l'équation (10.29) s'écrit,

$$\dot{\mathbf{v}}_a(P) = \dot{\mathbf{v}}_a(A) + \dot{\mathbf{v}}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_r(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.37)$$

Compte tenu des relations (10.27) et (10.23) les dérivées temporelles des vitesses absolue et relative du point matériel P s'écrivent,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_a(P) &= \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{\mathbf{x}}_i + \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_r(P) &= \sum_{i=1}^3 \ddot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i + \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \dot{\hat{\mathbf{y}}}_i = \sum_{i=1}^3 \ddot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i + \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i (\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{y}}_i) \end{aligned} \quad (10.38)$$

A l'aide de la vitesse relative (10.27), on obtient l'identité vectorielle,

$$\sum_{i=1}^3 \dot{y}_i (\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{y}}_i) = \boldsymbol{\Omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i \right) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) \quad (10.39)$$

L'accélération absolue $\mathbf{a}_a(P)$ et l'accélération relative $\mathbf{a}_r(P)$ du point matériel P sont définies comme,

$$\mathbf{a}_a(P) = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_r(P) = \sum_{i=1}^3 \ddot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i \quad (10.40)$$

Les accélérations absolue $\mathbf{a}_a(P)$ et relative $\mathbf{a}_r(P)$ sont les accélérations du point matériel P dans les référentiels absolu et relatif où les repères absolu $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ et relatif $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ sont immobiles. Compte tenu de l'équation (10.39) et des définitions (10.40), les dérivées temporelles des vitesses (10.38) deviennent,

$$\dot{\mathbf{v}}_a(P) = \mathbf{a}_a(P) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{v}}_r(P) = \mathbf{a}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) \quad (10.41)$$

Compte tenu de la dérivée temporelle de la position relative (10.25),

$$\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_r(P) = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) \quad (10.42)$$

En substituant les équations (10.41), (10.42) et l'accélération absolue du point A , qui s'écrit $\mathbf{a}_a(A) = \dot{\mathbf{v}}_a(A)$, dans l'équation (10.37), on obtient l'identité suivante entre les accélérations,

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.43)$$

L'accélération centripète $\mathbf{a}_c(P)$, l'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_C(P)$ et l'accélération d'Euler $\mathbf{a}_E(P)$ du point matériel P sont définies respectivement comme,

$$\mathbf{a}_c(P) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) \quad (10.44)$$

$$\mathbf{a}_C(P) = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) \quad (10.45)$$

$$\mathbf{a}_E(P) = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.46)$$

Compte tenu des définitions (10.44), (10.45) et (10.46), l'accélération absolue (10.43) du point matériel P peut s'écrire,

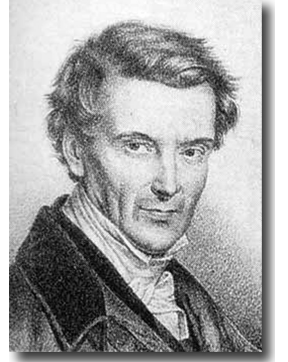
$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + \mathbf{a}_c(P) + \mathbf{a}_C(P) + \mathbf{a}_E(P) \quad (10.47)$$

L'accélération d'entraînement $\mathbf{a}_e(P)$ du point matériel P est définie comme l'accélération absolue qu'aurait le point matériel P s'il était fixe dans le référentiel accéléré, c'est-à-dire si $\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}_r(P) = \mathbf{0}$ ainsi $\mathbf{a}_C(P) = 0$. Par conséquent, l'accélération d'entraînement s'écrit,

$$\mathbf{a}_e(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_c(P) + \mathbf{a}_E(P) \quad (10.48)$$

Par conséquent, l'accélération absolue (10.47) du point matériel P peut s'écrire,

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_e(P) + \mathbf{a}_r(P) + \mathbf{a}_C(P) \quad (10.49)$$



Gaspard-Gustave de
Coriolis

10.2.4 Forces d'inertie

La loi du mouvement absolu (2.32) du point matériel P s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = m \mathbf{a}_a(P) \quad (10.50)$$

Compte tenu de l'expressions (10.43) de l'accélération absolue et de l'accélération d'entraînement, la loi du mouvement (10.50) peut être mise sous la forme,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = m \left(\mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + \mathbf{a}_c(P) + \mathbf{a}_C(P) + \mathbf{a}_E(P) \right) \quad (10.51)$$

En passant tous les termes du membre de droite de l'équation (10.51) dans le membre de gauche à l'exception du terme $m \mathbf{a}_r(P)$, on obtient la loi du mouvement relatif du point matériel P ,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} - m \left(\mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_c(P) + \mathbf{a}_C(P) + \mathbf{a}_E(P) \right) = m \mathbf{a}_r(P) \quad (10.52)$$

Les termes du membre de gauche de l'équation (10.52) sont des forces qu'il s'agit à présent de caractériser physiquement. Compte tenu des définitions (10.44), (10.45) et (10.46) des accélérations, la force inertielle $\mathbf{F}_i$, la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$, la force centrifuge $\mathbf{F}_c$ et la force d'Euler $\mathbf{F}_E$ sont respectivement définies comme,

$$\mathbf{F}_i = -m \mathbf{a}_a(A) \quad (10.53)$$

$$\mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c(P) = -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) \quad (10.54)$$

$$\mathbf{F}_C = -m \mathbf{a}_C(P) = -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) \quad (10.55)$$

$$\mathbf{F}_E = -m \mathbf{a}_E(P) = -m \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.56)$$

La force inertielle $\mathbf{F}_i$ exercée sur le point matériel A est orientée dans la direction opposée à son accélération absolue $\mathbf{a}_a(A)$. La force centrifuge $\mathbf{F}_c$ exercée sur le point matériel P est orientée dans la direction opposée à l'accélération centripète $\mathbf{a}_c(P)$, qui elle est orientée vers le centre ou l'origine O . Ainsi, la force centrifuge $\mathbf{F}_c$ est orientée radialement vers l'extérieur : elle *fuit* le centre. La force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ exercée sur le point matériel P est orientée dans la direction opposée à l'accélération de Coriolis $\mathbf{a}_C(P)$. La force d'Euler $\mathbf{F}_E$ exercée sur le point matériel P est orientée dans la direction opposée à l'accélération d'Euler $\mathbf{a}_E(P)$. La force d'entraînement $\mathbf{F}_e$ est la force exercée sur le point matériel P lorsqu'il est au repos dans le référentiel accéléré, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e(P) = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_E \quad (10.57)$$

Compte tenu des définitions (10.53), (10.54), (10.55) et (10.56) la loi du mouvement relatif (10.52) devient,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_E = m \mathbf{a}_r(P) \quad (10.58)$$

Sur le plan formel, il y a quatre forces d'inertie $\mathbf{F}^{\text{in}}$: la force inertielle $\mathbf{F}_i$, la force centrifuge $\mathbf{F}_c$, la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ et la force d'Euler $\mathbf{F}_E$. Ainsi, la résultante des forces d'inertie s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_E \quad (10.59)$$

et la loi du mouvement relatif (10.58) se réduit à,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = m \mathbf{a}_r(P) \quad (10.60)$$

Les expressions des lois du mouvement absolu (10.50) et relatif (10.60) sont rigoureusement identiques sur le plan mathématique mais leur signification physique est différente. Les accélérations du point matériel P dans la loi du mouvement absolu sont des effets, et les forces d'inertie dans la loi du mouvement relatif sont des causes.

A titre d'exemple, on considère une voiture qui effectue un virage. Par rapport au référentiel absolu de la terre, le conducteur de la voiture, que l'on peut assimiler à un point matériel P , subit une accélération centripète $\mathbf{a}_c(P)$ orientée radialement vers le centre O du virage. Par rapport au référentiel accéléré de la voiture, le conducteur subit une force



Accélération
centripète et force
centrifuge

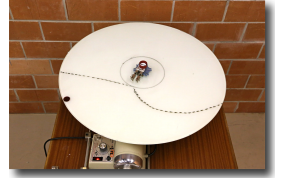
centrifuge $\mathbf{F}_c$ qui le pousse radialement vers l'extérieur du virage dans la direction opposée à l'accélération centripète.

Dans l'expérience de la caméra tournante qui filme un jet d'eau en rotation (Fig. 10.3), le référentiel absolu est celui de l'auditoire et le référentiel accéléré est celui de la buse tournante ou de la caméra tournante. Comme ces référentiels sont en rotation l'un par rapport à l'autre, les points matériels O et A au centre des repères absolu et relatif sont confondus, ce qui implique que $\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{0}$. Comme la buse et la caméra tournent à vitesse angulaire constante $\mathbf{\Omega}$, cela implique que $\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$. Par conséquent, les forces d'inertie qui agissent sur les gouttes d'eau dans le référentiel accéléré – considérés comme des points matériels P qui sortent à la vitesse relative $\mathbf{v}_r(P)$ de la buse – sont la force centrifuge $\mathbf{F}_c$ et la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$. Ainsi, dans le référentiel accéléré, le mouvement des gouttes d'eau est une courbe. Dans le référentiel absolu de l'auditoire, les gouttes sont en mouvement rectiligne uniforme puisqu'il n'y a pas de force d'inertie dans ce référentiel.

Dans l'expérience du feutre en mouvement circulaire sur un plateau horizontal, on considère deux types de mouvements. Premièrement, lorsque le plateau est immobile et le feutre tourne à vitesse angulaire constante $\mathbf{\Omega}$, le plateau est un référentiel absolu. Ainsi, lorsque le feutre est relâché, il est en mouvement rectiligne uniforme. Deuxièmement, lorsque le plateau et le feutre tournent à vitesse angulaire constante $\mathbf{\Omega}$, le plateau est un référentiel relatif et le feutre est immobile par rapport au plateau. Ainsi, lorsque le feutre est relâché, il subit la force centrifuge $\mathbf{F}_c$ et la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$. Par conséquent, le mouvement du feutre est une courbe dans ce référentiel. Au moment où le feutre est relâché, la force de Coriolis est nulle puisque la vitesse relative est nulle. Cependant, vu que le feutre est accéléré par la force centrifuge, la force de Coriolis vient progressivement s'exercer sur le feutre. Ainsi, après que le feutre soit relâché, sa trajectoire est initialement radiale, car la force centrifuge domine. Ceci n'est pas le cas pour le jet d'eau tournant où la trajectoire initiale est quasiment tangentielle parce la force de Coriolis domine initialement.



Jet d'eau en rotation



Feutre sur un plateau

10.3 Mouvement relatif

Dans la section précédente, on a établi la loi du mouvement relatif dans un référentiel accéléré. Dans cette section, on va considérer quatre exemples de mouvement relatif. Dans le premier exemple, on examine la dynamique d'un pendule mathématique dans un train uniformément accéléré. Dans le deuxième exemple, on veut déterminer le poids apparent d'une personne dans un ascenseur uniformément accéléré. Dans le troisième exemple, on décrit le mouvement d'un point matériel dans une centrifugeuse. Dans le quatrième exemple, on considère un pendule qui oscille dans le plan d'une porte tournante.

10.3.1 Pendule dans un train accéléré

On considère un train qui a un mouvement rectiligne uniformément accéléré par rapport aux voies. Un pendule mathématique, constitué d'un point matériel de masse m suspendu au bout d'un fil de masse négligeable, est attaché au plafond d'un wagon. On associe au référentiel absolu des voies le repère absolu $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2)$ et au référentiel relatif du train le repère relatif $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2)$ (Fig. 10.5).

Les forces extérieures sont le poids $\mathbf{P}$ et la tension $\mathbf{T}$ dans le fil qui s'écrivent dans le repère relatif comme,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{y}}_2 \\ \mathbf{T} &= T\sin\theta\hat{\mathbf{y}}_1 + T\cos\theta\hat{\mathbf{y}}_2\end{aligned}\tag{10.61}$$

Comme le référentiel relatif du train est en mouvement de translation par rapport au référentiel absolu, la vitesse angulaire d'entraînement est nulle, c'est-à-dire $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$. Ainsi, la seule force d'inertie est la force inertielle (10.53) s'écrit dans le repère relatif comme,

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_a(A) = -m\mathbf{a} = -ma\hat{\mathbf{y}}_1\tag{10.62}$$

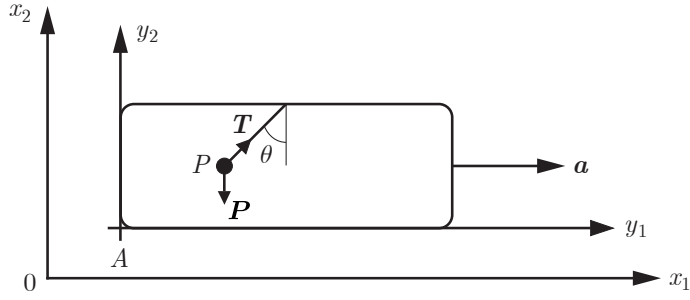


FIGURE 10.5 Pendule mathématique suspendu au plafond d'un wagon de train en mouvement uniformément accéléré.

La loi du mouvement relatif (10.60) du pendule est,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}_r(P) \quad (10.63)$$

On désire déterminer l'angle d'équilibre θ_0 du pendule par rapport au référentiel relatif. A l'équilibre dans le référentiel du train, l'accélération relative du pendule est nulle,

$$\mathbf{a}_r(P) = \mathbf{0} \quad (10.64)$$

En projetant la loi du mouvement relatif (10.63) selon les axes de coordonnées relatives Ay_1 et Ay_2 compte tenu de la condition d'équilibre (10.64), et on les évaluant en $\theta = \theta_0$, on obtient les équations scalaires suivantes,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{y}}_1 : \quad & T \sin \theta_0 - ma = 0 \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}}_2 : \quad & -mg + T \cos \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (10.65)$$

Par conséquent, l'angle d'équilibre satisfait la relation,

$$\tan \theta_0 = \frac{T \sin \theta_0}{T \cos \theta_0} = \frac{a}{g} \quad (10.66)$$

Ainsi, il y a trois cas qui dépendent du signe de l'accélération du train. Si le train accélère, c'est-à-dire que $a > 0$, le pendule est incliné vers l'arrière. Si le train freine, c'est-à-dire que $a < 0$, le pendule est incliné vers l'avant. Si le train est au repos, c'est-à-dire que $a = 0$, le pendule est vertical (Fig. 10.5).

10.3.2 Poids apparent

On aimerait trouver une expression analytique pour le poids apparent d'une personne dans un ascenseur qui est en mouvement rectiligne uniformément accéléré. Le poids apparent $\mathbf{P}'$ correspond au poids mesuré sur une balance dans l'ascenseur. Pour modéliser ceci, on convient d'assimiler la personne à un point matériel de masse m attaché à un dynamomètre constitué d'un ressort suspendu au plafond de l'ascenseur. On associe au référentiel relatif de l'ascenseur l'axe de coordonnée vertical Ay_3 (Fig. 10.6).

Les forces extérieures sont le poids $\mathbf{P}$ et la tension $\mathbf{T}$ dans le fil qui s'écrivent dans le repère relatif comme,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m \mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{y}}_3 \\ \mathbf{T} &= T \hat{\mathbf{y}}_3 \end{aligned} \quad (10.67)$$

Comme le référentiel relatif de l'ascenseur est en mouvement de translation par rapport au référentiel absolu, la vitesse angulaire d'entraînement est nulle, c'est-à-dire $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Ainsi, la seule force d'inertie est la force inertielle (10.53) s'écrit dans le repère relatif comme,

$$\mathbf{F}_i = -m \mathbf{a}_a(A) = -m \mathbf{a} = -ma \hat{\mathbf{y}}_3 \quad (10.68)$$

On désire déterminer la poids apparent de la personne dans le référentiel accéléré de l'ascenseur. A l'équilibre dans le référentiel de l'ascenseur, l'accélération relative de la personne est nulle,

$$\mathbf{a}_r(P) = \mathbf{0} \quad (10.69)$$

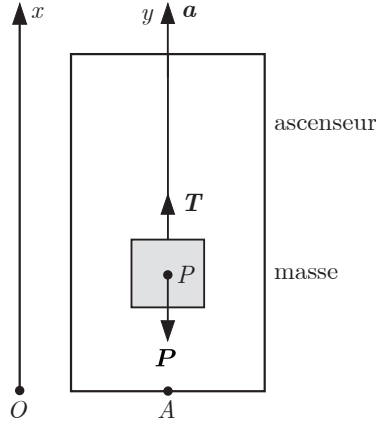


FIGURE 10.6 Mesure du poids apparent d'une masse dans un ascenseur en mouvement rectiligne à accélération constante.

En projetant la loi du mouvement relatif (10.63) selon l'axe de coordonnée relative Ay_3 compte tenu de la condition d'équilibre (10.69), on obtient l'équation scalaire suivante,

$$\text{selon } \hat{\mathbf{y}}_3 : -mg + T - ma = 0 \quad (10.70)$$

Ainsi, la tension dans le fil s'écrit,

$$T = T \hat{\mathbf{y}}_3 = m(a + g) \hat{\mathbf{y}}_3 \quad (10.71)$$

A l'équilibre, le poids apparent $\mathbf{P}'$ de la personne compense la tension dans le référentiel de l'ascenseur,

$$\mathbf{P}' + \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (10.72)$$

Compte tenu de la tension et de la condition d'équilibre (10.72), le poids apparent de la personne est,

$$\mathbf{P}' = -m(g + a) \hat{\mathbf{y}}_3 \quad (10.73)$$

Si l'ascenseur accélère vers le haut, c'est-à-dire que $a > 0$, la norme du poids apparent $m(g + a)$ est supérieure à la norme du poids réel mg . En revanche, si l'ascenseur accélère vers le bas, c'est-à-dire que $a < 0$, la norme du poids apparent est inférieure à la norme du poids réel. Dans le cas où l'ascenseur est en chute libre, c'est-à-dire $a = -g$, le poids apparent est nul, ce qui signifie que la personne est en état d'apesanteur. Les vols paraboliques permettant d'expérimenter l'apesanteur fonctionnent selon ce principe.



Vol parabolique

10.3.3 Centrifugeuse

On considère une centrifugeuse constituée d'un tube qui tourne dans un plan horizontal à vitesse angulaire Ω constante autour de son extrémité située au point O . Un point matériel P de masse m est astreint à se déplacer dans le tube. On associe au référentiel absolu de la centrifugeuse le repère absolu $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ et au référentiel relatif du tube le repère relatif $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ où l'axe Oy_1 est orienté le long du tube (Fig. 10.7).

Les forces extérieures sont le poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ et la force de réaction normale $\mathbf{N}$ du tube qui s'écrivent dans le repère relatif comme,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m\mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{y}}_3 \\ \mathbf{N} &= N_2 \hat{\mathbf{y}}_2 + N_3 \hat{\mathbf{y}}_3 \end{aligned} \quad (10.74)$$

Comme le référentiel relatif est en mouvement de rotation uniforme par rapport au référentiel absolu, la dérivée temporelle de la vitesse angulaire d'entraînement est nulle, c'est-à-dire que $\dot{\Omega} = \mathbf{0}$, et le point O coïncide avec le point A ce qui signifie que l'accélération absolue du point A est nulle, c'est-à-dire que $\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{0}$. Dans ce cas, les forces d'inertie sont la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ et la force centrifuge $\mathbf{F}_c$. Ainsi, la loi du mouvement relatif (10.60) s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (10.75)$$

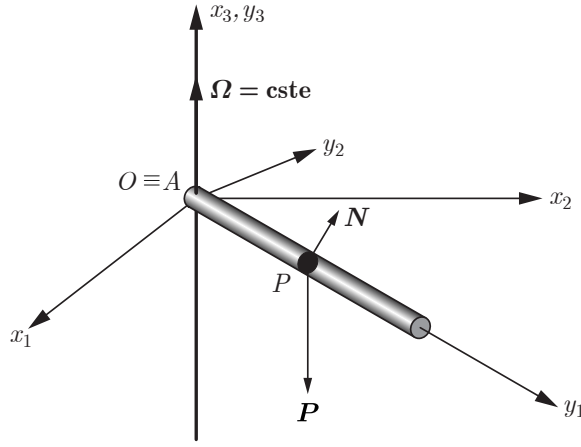


FIGURE 10.7 La centrifugeuse est constituée d'un tube en mouvement de rotation uniforme dans lequel un point matériel P est astreint à se déplacer.

Comme le point matériel P se déplace dans le tube orienté selon l'axe de coordonnée relative de vecteur unitaire $\hat{\mathbf{y}}_1$, la position relative $\mathbf{r}_r(P)$, la vitesse relative $\mathbf{v}_r(P)$ et de l'accélération relative $\mathbf{a}_r(P)$ du point matériel P dans le référentiel relatif du tube s'écrivent,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_r(P) &= y_1 \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \mathbf{v}_r(P) &= \dot{y}_1 \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \mathbf{a}_r(P) &= \ddot{y}_1 \hat{\mathbf{y}}_1\end{aligned}\tag{10.76}$$

La vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ de rotation du tube s'écrit,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{y}}_3\tag{10.77}$$

Compte tenu des grandeurs cinématiques (10.76) et de la vitesse angulaire (10.77), la force centrifuge $\mathbf{F}_c$ et la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ s'écrivent,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_c &= -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) = -m \Omega^2 y_1 \hat{\mathbf{y}}_3 \times (\hat{\mathbf{y}}_3 \times \hat{\mathbf{y}}_1) = m \Omega^2 y_1 \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \mathbf{F}_C &= -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = -2m \Omega \dot{y}_1 \hat{\mathbf{y}}_3 \times \hat{\mathbf{y}}_1 = -2m \Omega \dot{y}_1 \hat{\mathbf{y}}_2\end{aligned}\tag{10.78}$$

Compte tenu des grandeurs cinématiques (10.76), des forces extérieures (10.74) et des forces d'inertie (10.78), la projection de la loi du mouvement relatif (10.75) selon les axes de coordonnées relatifs de vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{y}}_1$, $\hat{\mathbf{y}}_2$ et $\hat{\mathbf{y}}_3$ donne trois équations scalaires,

$$\begin{aligned}\text{selon } \hat{\mathbf{y}}_1 : & \quad m \Omega^2 y_1 = m \ddot{y}_1 \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}}_2 : & \quad -2m \Omega \dot{y}_1 + N_2 = 0 \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}}_3 : & \quad -mg + N_3 = 0\end{aligned}\tag{10.79}$$

La première équation (10.79) est l'équation du mouvement qui peut être exprimée comme,

$$\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1 = 0\tag{10.80}$$

et les deux autres équations donnent les composantes N_2 et N_3 de la force de réaction normale $\mathbf{N}$. La force de réaction normale $\mathbf{N}$ compense la résultante du poids $\mathbf{P}$ et de la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ de sorte que le mouvement est entièrement déterminé par la force centrifuge $\mathbf{F}_c$. L'équation du mouvement (10.80) est une équation différentielle du deuxième ordre qui est équivalente aux équations différentielles du premier ordre,

$$\dot{y}_1 = \pm \Omega y_1 \quad \text{ainsi} \quad y_1(t) = e^{\pm \Omega t}\tag{10.81}$$

La solution générale des équations différentielles du premier ordre (10.81) est une combinaison linéaire des deux solutions particulières (10.81),

$$y_1(t) = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} \quad \text{où} \quad A, B = \text{cstes}\tag{10.82}$$

La dérivée temporelle de l'équation horaire générale (10.82) donne l'équation de la vitesse générale,

$$\dot{y}_1(t) = A\Omega e^{\Omega t} - B\Omega e^{-\Omega t} \quad (10.83)$$

Compte tenu des conditions initiales sur la position relative et la vitesse relative,

$$y_1(0) = A + B \quad \text{et} \quad \dot{y}_1(0) = (A - B)\Omega = 0 \quad \text{ainsi} \quad A = B = \frac{y_1(0)}{2} \quad (10.84)$$

l'équation horaire particulière (10.82) du point matériel P s'écrit,

$$y_1(t) = y_1(0) \left(\frac{e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}}{2} \right) \quad (10.85)$$

et elle est remise en forme comme,

$$y_1(t) = y_1(0) \cosh(\Omega t) \quad (10.86)$$

ce qui signifie que de manière asymptotique le point matériel s'éloigne exponentiellement vite dans la direction radiale sous l'action de la force centrifuge, d'où le nom de l'appareil : la centrifugeuse.



Centrifugeuse

10.3.4 Pendule sur une porte tournante

Un pendule mathématique constitué d'un point matériel P de masse m suspendu au bout d'un fil de longueur ℓ et de masse négligeable, est attaché à la charnière d'une porte. Le pendule est astreint à osciller dans le plan de la porte qui est en mouvement circulaire uniforme à vitesse angulaire constante Ω . On associe au référentiel absolu du bâtiment le repère absolu $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ et au référentiel relatif de la porte le repère sphérique relatif $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ (Fig. 10.8).

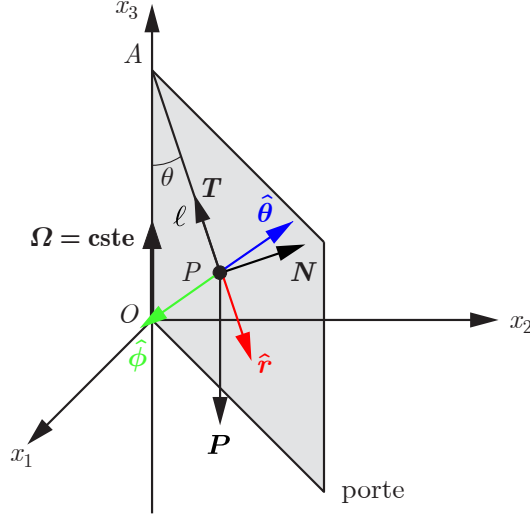


FIGURE 10.8 Un pendule mathématique oscille dans le plan d'une porte tournant à vitesse angulaire constante.

Les forces extérieures sont le poids $\mathbf{P}$, la force de réaction normale $\mathbf{N}$ de la porte et la tension $\mathbf{T}$ dans le fil qui s'écrivent dans le repère sphérique relatif comme,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m\mathbf{g} = mg \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - mg \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{N} &= -N \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \mathbf{T} &= -T \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (10.87)$$

Comme le référentiel relatif est en mouvement de rotation uniforme par rapport au référentiel absolu, la dérivée temporelle de la vitesse angulaire d'entraînement est nulle, c'est-à-dire que $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$, et le point O coïncide avec le point A ce qui signifie que l'accélération absolue du

point A est nulle, c'est-à-dire que $\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{0}$. Dans ce cas, les forces d'inertie sont la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ et la force centrifuge $\mathbf{F}_c$. Ainsi, la loi du mouvement relatif (10.60) s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (10.88)$$

Comme le point matériel au bout d'un fil de longueur ℓ se déplace dans le plan de la porte $\phi = \text{cte}$ décrit par rapport au référentiel relatif de la porte, la position relative (5.15), la vitesse relative (5.18) et l'accélération relative (5.20) dans ce référentiel s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r(P) &= \ell \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{v}_r(P) &= \ell \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{a}_r(P) &= -\ell \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + \ell \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (10.89)$$

La vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ de rotation de la porte s'écrit,

$$\boldsymbol{\Omega} = -\Omega (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (10.90)$$

Compte tenu des grandeurs cinématiques (10.89) et de la vitesse angulaire (10.90), la force centrifuge $\mathbf{F}_c$ et la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) = -m \ell \Omega^2 (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times ((\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \\ &= m \ell \Omega^2 \sin^2 \theta \hat{\mathbf{r}} + m \ell \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{F}_C &= -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = 2m \ell \Omega \dot{\theta} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = 2m \ell \Omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (10.91)$$

Compte tenu des grandeurs cinématiques (10.89), des forces extérieures (10.87) et des forces d'inertie (10.91), la projection de la loi du mouvement relatif (10.75) selon les axes de coordonnées relatifs de vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ donne trois équations scalaires,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{r}} : \quad & m g \cos \theta - T + m \ell \Omega^2 \sin^2 \theta = -m \ell \dot{\theta}^2 \\ \text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : \quad & -m g \sin \theta + m \ell \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = m \ell \ddot{\theta} \\ \text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad & -N + 2m \ell \Omega \dot{\theta} \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (10.92)$$

La deuxième équation (10.92) est l'équation du mouvement qui peut être exprimée comme,

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0 \quad (10.93)$$

Il s'agit de la même équation du mouvement que celle d'une bille dans un anneau de rayon ℓ en rotation à vitesse angulaire scalaire $\Omega = \text{cte}$ autour d'un axe vertical (6.19). Les deux autres équations (10.92) Les deux autres équations donnent les composantes des forces de contraintes orthogonales au mouvement relatif, à savoir la force réaction normale $\mathbf{N}$ de la porte et la tension $\mathbf{T}$ dans le fil,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -m (g \cos \theta + \ell \dot{\theta}^2 + \ell \Omega^2 \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{N} &= -2m \ell \Omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (10.94)$$